

Quelques mesures physiques en océanographie

1^{ère} partie :

Étude de la compressibilité et de la conductivité de l'eau océanique

1.1 Étude de la compressibilité de l'eau océanique

1.1.1 l'équation de la statique des fluides s'écrit $-\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} = \vec{0}$ soit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \end{array} \right.$$

donc $\frac{dP}{dz} = -\rho g$

1.1.2 on a $\chi_{T,s} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_{T,s}$ or $\rho = \frac{m}{V}$ donc $\chi_0 = -\frac{\rho}{m} \left(\frac{\partial m}{\partial p} \right)_{T,s} = -\rho \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T,s} \implies \chi_0 = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T,s}$

1.1.3 on en déduit que $dP = \frac{d\rho}{\chi_0 \rho}$ soit l'équation différentielle $\left| \frac{1}{\chi_0 \rho} \frac{d\rho}{dz} = -\rho g \right.$

par séparation des variables $\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho^2} = -\int_0^z \chi_0 g dz$

il vient $\left| \rho(z) = \frac{\rho_0}{1 + \rho_0 \chi_0 g z} \right.$

1.1.4 $\frac{\Delta \rho}{\rho} = 1 - \frac{\rho(0)}{\rho(h)} = -\rho_0 \chi_0 g h \approx -\rho(h) \chi_0 g h$

si $z \nearrow \rho \searrow$ car le fluide en bas est plus comprimé!

1.1.5 :

$h(m)$	$\frac{\Delta \rho}{\rho}$
90	$-3.6 \cdot 10^{-4}$
100	$-4.0 \cdot 10^{-4}$
10000	$-4.0 \cdot 10^{-2}$

cette variation reste faible!

1.1.6 $P(z) = P(0) + \int_0^z -\frac{g\rho_0}{1 + \rho_0 \chi_0 g z} dz \implies \left| P(z) = P(0) - \frac{1}{\chi_0} \ln(1 + \rho_0 \chi_0 g z) \right.$

1.1.7 $P(0) = P(h) + \frac{1}{\chi_0} \ln(1 + \rho_0 \chi_0 g h)$ et pour le cas du fluide incompressible $P^*(0) = P(h) + \rho(h)gh$

$h(m)$	$P(0)(Pa)$	$P^*(0)(Pa)$
90	$10.05 \cdot 10^5$	$10.05 \cdot 10^5$
100	$11.05 \cdot 10^5$	$11.05 \cdot 10^5$
10000	$986.8 \cdot 10^5$	$1007 \cdot 10^5$

$\chi_0 = 4 \cdot 10^{-10} Pa^{-1}$ le fluide est très peu compressible les deux

résultats sont proches

1.2 Étude de la conductivité de l'eau océanique

1.2.1 $\Phi_{1c}(t) = B_1(t)S$ et $\Phi_{2c}(t) = B_2(t)S$

1.2.2 on a $\vec{rot}\vec{B} = \mu\vec{j}$ d'après le théorème de Stockes $\int \int_{S_T} \vec{rot}\vec{B}.d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{B}.d\vec{\ell}$ soit le théorème d'Ampère $\oint_{\Gamma} \vec{B}.d\vec{\ell} = \int \int_{S_T} \mu\vec{j}.d\vec{S}$

1.2.3 $\ell B_1(t) = \mu(N_1 i_1 + i + N_3 i_3)$

1.2.4 $\ell B_2(t) = \mu(N_2 i_2 - i + N_4 i_3)$

1.2.5 le voltmètre d'impédance infinie implique que $i_2(t) = 0$
donc $\ell B_2(t) = \mu(-i + N_4 i_3)$

1.2.6 $\Phi_{2c}(t) = \frac{S\mu}{\ell}(-i + N_4 i_3)$ (1)

1.2.7 loi de Faraday $e = Ri = -\frac{d(\Phi_{1c} - \Phi_{2c})}{dt}$

soit $i = \frac{\dot{\Phi}_{2c} - \dot{\Phi}_{1c}}{R}$ (2)

1.2.8 $u_1 = -e_1 = N_1 \dot{\Phi}_{1c}$ et $u_3 = -e_3 = N_3 \dot{\Phi}_{1c}$

1.2.9 $u_2 = -e_2 = N_2 \dot{\Phi}_{2c}$ et $u_4 = -e_4 = N_4 \dot{\Phi}_{2c}$

1.2.10 loi des mailles $R_p i_3 + u_4 + u_3 = 0$ donc $i_3 = -\frac{N_3 \dot{\Phi}_{1c} + N_4 \dot{\Phi}_{2c}}{R_p}$ (3)

1.2.11 (2) et (3) injectées dans (1) donne

$$\frac{\ell R}{\mu S} \Phi_{2c} = (1 - N_3 N_4 \frac{R}{R_p}) \dot{\Phi}_{1c} - (1 + N_4^2 \frac{R}{R_p}) \dot{\Phi}_{2c}$$

1.2.12 tenant compte de 1.2.8 et 9 en notation complexe , il vient

$$\frac{\ell R}{\mu S} \frac{U_2}{j\omega N_2} = (1 - N_3 N_4 \frac{R}{R_p}) \frac{U_1}{N_1} - (1 + N_4^2 \frac{R}{R_p}) \frac{U_2}{N_2}$$

1.2.13 on aura

$$\underline{U}_2 \approx \frac{\underline{U}_1}{1 - j \frac{\ell R}{\mu S \omega}}$$

soit $U_2 = \frac{U_1}{\sqrt{1 + (\frac{\ell R}{\mu S \omega})^2}} < U_1$

1.2.14 $R = \frac{\mu S \omega}{\ell} \sqrt{(\frac{U_1}{U_2})^2 - 1}$

1.2.15 $R = \frac{\ell_T}{\sigma S_T}$

1.2.16 on a $\sigma = \frac{\ell_T}{R S_T} = \frac{\ell_T}{\mu S S_T \omega \sqrt{(\frac{U_1}{U_2})^2 - 1}}$ or $U_2 \ll U_1$ donc $\sigma \approx \frac{\ell_T}{\mu S S_T \omega U_1} U_2$ soit $\alpha = \frac{\ell_T}{\mu S S_T \omega U_1}$

1.2.17 par étalonnage on détermine α càd on mesure U_{02} pour une solution de σ_0 connue ce qui donne $\sigma = \frac{\sigma_0}{U_{02}} U_2$ puis par une simple lecture du voltmètre on aura σ de n'importe quelle solution!

2^{ème} partie :

Mesure des variations du niveau des océans

2.1 Modélisation mécanique d'une lame de quartz

2.1.1 Aspect énergétique

2.1.1.1 k est la raideur de la force élastique s'exprimant en $N.m^{-1}$

le terme d'énergie cinétique $\frac{1}{2}m_q\dot{x}^2$ et le terme d'énergie potentielle élastique $\frac{1}{2}kx^2$

2.1.1.2 en convention récepteur indiquée la puissance reçue $p(t) = u(t)i(t)$

2.1.1.3 $\delta W_d = \vec{F}_d \cdot dx \vec{e}_x = -\gamma_q \dot{x} dx = -\gamma_q \dot{x}^2 dt$

2.1.1.4 $dE_m = \delta W^{NC}$ NC forces extérieures non conservatives

2.1.1.5 $dE_m + dE_e = \delta W_d \implies m_q \dot{x} \ddot{x} + k \dot{x} x + p(t) = -\gamma_q \dot{x}^2$

soit $m_q \ddot{x} + \gamma_q \dot{x} + kx = -\frac{p(t)}{\dot{x}}$ donc $\left[F(t) = -\frac{u(t)i(t)}{\dot{x}} \right]$

2.1.1.6 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_q}}$ et $Q = \frac{\sqrt{km_q}}{\gamma_q}$

2.1.2 Mesure des caractéristiques mécaniques de la lame de quartz

2.1.2.1 un point lumineux brillant car $\delta = 0$

2.1.2.2 compenser la différence de marche due à l'épaisseur non nulle de la lame séparatrice

2.1.2.3 $\varepsilon(t) = \frac{x(t)}{2}$, les deux miroirs sont éclairés à l'aide du Laser en incidence normale $i = 0$

2.1.2.4 on a $\delta = 2\varepsilon \cos i$ soit $\delta = 2\varepsilon$ donc $I = I_0(1 + \cos \frac{4\pi\varepsilon}{\lambda_0})$

2.1.2.5 $x(0) = 0$ et $\varepsilon(t=0) = 0$ donc $I(t=0) = 2I_0$

2.1.2.6 $I = I_0(1 + \cos \frac{2\pi x(t)}{\lambda_0})$

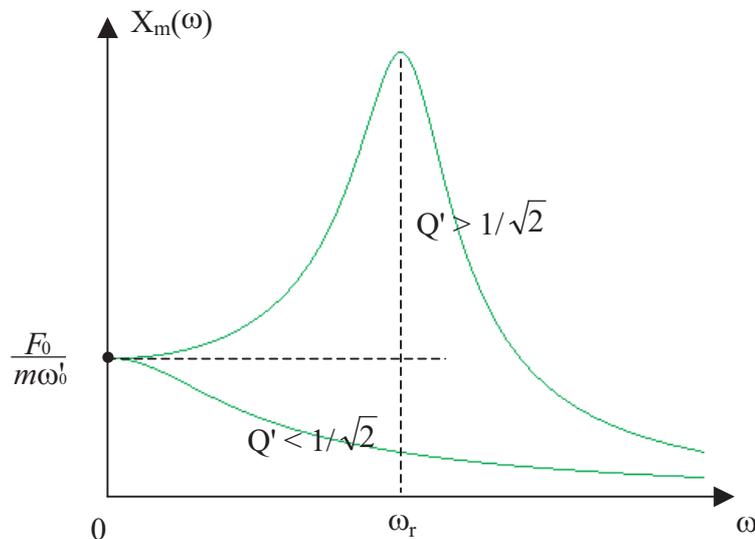
2.1.2.7 le point lumineux au niveau du (PD) devient alternativement sombre et brillant car l'ordre d'interférence $p_0 = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{x(t)}{\lambda_0}$ varie au cours du temps

2.1.2.8 de même qu'en 2.1.1.6 on aura $m = m_q + m_m$ et $\omega'_0 = \sqrt{\frac{k}{m_q+m_m}}$ encore $Q' = \frac{\sqrt{k(m_q+m_m)}}{\gamma_q+\gamma_m}$

2.1.2.9 en notation complexe, l'équation (5) s'écrit :

$$(-\omega^2 + \frac{\omega'}{Q'}j\omega + \omega_0'^2)\underline{X}_0 = \frac{F_0}{m} \implies \underline{X}_0(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{(-\omega^2 + \frac{\omega'}{Q'}j\omega + \omega_0'^2)}$$

soit $\left[X_0(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0'^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega'}{Q'})^2}} \right]$



d'autre part $\phi(\omega) = \arg X_0 = \arg[(\omega_0'^2 - \omega^2) - j\frac{\omega'\omega}{Q'}]$

$$\text{donc } \cos \phi(\omega) = \frac{(\omega_0'^2 - \omega^2)}{\sqrt{(\omega_0'^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega'\omega}{Q'})^2}} \text{ et } \sin \phi(\omega) = \frac{-\frac{\omega'\omega}{Q'}}{\sqrt{(\omega_0'^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega'\omega}{Q'})^2}} < 0$$

2.1.2.10 à la résonance l'amplitude de la variation de l'épaisseur de la lame (LQ) devient maximale , la lame d'air atteint une épaisseur maximale (varie entre $[-e_{max}, e_{max}]$ pendant une période) , le nombre d'alternance brillant-sombre par période sera maximal

2.1.2.11 $I(t) = I_0 \{1 + \cos[\frac{2\pi X_0(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega))}{\lambda_0}]\}$

2.1.2.12 avant la résonance la courbe $X_0(f)$ est croissante , or le nombre N d'alternance brillant-sombre est croissant avec X_0

donc $N_1 = 12 < N_2 = 22 \implies X_0(f_1) < X_0(f_2) \implies f_1 < f_2 \implies f_1 = 90 \text{ kHz} < f_2 = 95 \text{ kHz}$

2.1.2.13 si $Q'^2 \gg 1$ on aura $X_0(\omega) \approx \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0'^2 - \omega^2)^2}}$ soit la résonance $f'_0 = 100 \text{ kHz}$

2.1.2.14 la distance de translation du miroir mobile du Michelson nécessaire pour défilier un point brillant sombre brillant est $\frac{\lambda_0}{2}$ en effet $\Delta p_0 = 1 = \frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda_0}$

soit entre les instants $[0, \frac{T}{4}]$, $x(t)$ varie entre $[0, X_0]$

la variation de l'épaisseur de la lame d'air équivalente vaut à la résonance $\Delta\varepsilon = \frac{25}{2} \times \frac{633}{2} \text{ nm}$ donc $\Delta e_{max} = 2\Delta\varepsilon = 7.9 \mu m$

2.1.2.15 on a $\omega'_0 = \sqrt{\frac{k}{m_q + m_m}} = \sqrt{\frac{k}{100m_q}} = \frac{\omega_0}{10}$ soit $f_0 = 10 \text{ f}'_0 = 1.0 \text{ MHz}$

d'autre part $Q' = \frac{\sqrt{k(m_q + m_m)}}{\gamma_q + \gamma_m} = \frac{\sqrt{100km_q}}{1001\gamma_q} \approx \frac{Q}{100}$ donc $Q = 2000$

la résonance de la lame de quartz est prononcé (pic très étroit) à une fréquence élevée 1 MHz

2.2 Modélisation électrique de la lame de quartz

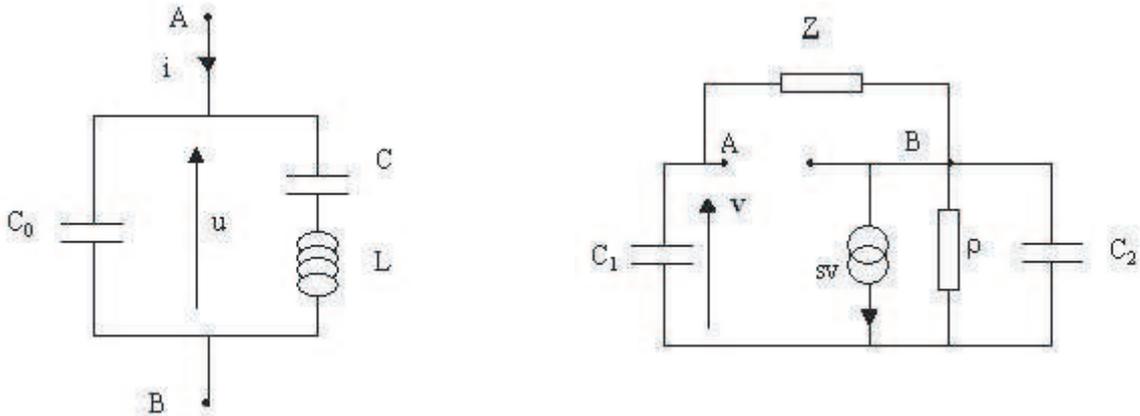
2.2.1 pour un dipôle RLC série : $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{1}{L} \frac{du}{dt}$ c'est une équation analogue à l'équation (3)

il vient $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

2.2.2 on a $R = 100 \Omega$, $Q = 2000$ et $\omega_0 = 2\pi \cdot 10^6 \text{ Hz}$ soit $L = \frac{RQ}{\omega_0} = 32 \text{ mH}$ et $C = \frac{1}{RQ\omega_0} = 0.8 \text{ pF}$

2.2.3 la capacité parasite modélise la capacité formée par les deux conducteurs de connexion au niveau des faces de la lame !

2.2.4 :



$$2.2.5 \quad \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_0} + \frac{1}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_L} = jC_0\omega + \frac{jC\omega}{1-LC\omega^2} = j\omega(C + C_0) \frac{1 - \frac{LCC_0}{C+C_0}\omega^2}{1-LC\omega^2}$$

$$\text{soit } \omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 5.59 \cdot 10^6 \text{ Hz et } \omega_p = \sqrt{\frac{C+C_0}{LCC_0}} = 5.61 \cdot 10^6 \text{ Hz} > \omega_s$$

2.2.6 AB est capacitif si $\underline{Y} = jC_{eq}\omega$ donc $Im(\underline{Y}) > 0 \implies \omega \in [0, \omega_s[\cup]\omega_p, +\infty[$

AB est inductif si $Im(\underline{Y}) < 0 \implies \omega \in]\omega_s, \omega_p[$

2.3 Oscillateur à quartz

2.3.1 : voir fig

2.3.2 le théorème de Millmann au point A

$$\underline{V} = \frac{\frac{0}{\underline{Z}_{C1}} + \frac{\underline{V}_B}{\underline{Z}}}{\frac{1}{\underline{Z}_{C1}} + \frac{1}{\underline{Z}}} \implies \underline{V} = \frac{1}{1 - L_e C_1 \omega^2} \underline{V}_B$$

le théorème de Millmann au point B

$$\underline{V}_B = \frac{\frac{\underline{V}}{\underline{Z}} + \frac{0}{\underline{Z}_{C2}} + \frac{0}{\rho} - s\underline{V}}{\frac{1}{\underline{Z}} + \frac{1}{\underline{Z}_{C2}} + \frac{1}{\rho}} \implies \underline{V}_B = \frac{1 - jsL_e\omega}{1 - L_e C_2 \omega^2 + j\frac{L_e\omega}{\rho}} \underline{V}$$

2.3.3 :

$$2.3.2 \implies 1 - \mathbf{j}sL_e\omega = (1 - L_e C_2 \omega^2 + \mathbf{j}\frac{L_e\omega}{\rho})(1 - L_e C_1 \omega^2)$$

$$\text{la partie réelle donne } 1 = (1 - L_e C_2 \omega^2)(1 - L_e C_1 \omega^2) \implies \omega = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{L_e C_1 C_2}} = \Omega_0$$

$$\text{la partie imaginaire donne } \rho = \frac{L_e C_1 \omega^2 - 1}{s} = \frac{C_1}{s C_2}$$

2.3.4 la lame de quartz AB est équivalente à une inductance $jL_e\omega$ dans l'intervalle

$$[\omega_s = 5.59, \omega_p = 5.61] \text{ MHz}$$

2.4 Mesure de variations de niveau

	$h(\text{m})$	$\Delta P = P(0) - P(h)$ (Pa)	$f_0 - f = \frac{\Delta P}{\alpha}$ (Hz)
2.4.1	100	$10.05 \cdot 10^5$	1005
	90	$9.05 \cdot 10^5$	905

$$\text{donc la variation de fréquence } \Delta f = f_{90} - f_{100} = (f_0 - 905) - (f_0 - 1005) = 100 \text{ Hz}$$

2.4.2 prévention des inondations et des Tsunamis

mesure de la hauteur des houles et des vagues.

fin du corrigé